TEOREMA LUI LAGRANGE
APLICATII ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

Prof. Dinu Maria
C.N. „Gib Mihăescu”, Drăgășani

TEOREMA LUI LAGRANGE

TEOREMĂ (J.L. Lagrange, 1736-1830)
Fie $f:[a;b]\rightarrow R,\ a<b$, astfel încât:
a) funcția f este continuă pe intervalul $[a;b]$
b) funcția f este derivabilă pe intervalul $(a;b)$
Atunci există $c\in(a;b)$ astfel încât $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretare geometrică
Dacă graficul unei funcții f admite tangentă în fiecare punct, eventual cu excepția capetelor intervalului $[a;b]$, atunci există un punct pe grafic în care tangentă este paralelă cu coarda care unește extremitățile acestuia.

Intr-adevăr, dacă $A(a;f(a))$, $B(b;f(b))$ sunt extremitațile graficului, $C(c;f(c))$, $c\in(a;b)$, $m_{tg}=f'(c)$, $m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, formula lui Lagrange arată egalitatea celor două pante.

Exercitiu rezolvat

1. Fie $f:[a;b]\rightarrow R,\ f(x)=\begin{cases} x^2+5x+2a+1, & x\in[0;1)\\ (a+1)x+b+1, & x\in[1;3]\end{cases}$.

Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât să se poată aplica teorema lui Lagrange și apoi să se aplice teorema.

Rezolvare
Continuitatea
f continuă pe $[0;1)\cup(1,3]$.
f continuă în x=1<=> $l_s(1)=l_d(1)=f(1)$

$$\left.\begin{array}{r} l_s(1)=7+2a\\ l_d(1)=a+b+4\\ f(1)=a+b+4\end{array}\right| \Rightarrow 2a+7=a+b+4 \Rightarrow a-b+3=0.$$

Derivabilitatea
f derivabilă pe $(0;1)$ și pe $(1;3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\frac{(x^2+5x+2a+1)-a-b-4}{x-1}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2+5x-6}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x-1)(x+6)}{x-1}=7\\ f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(a+3)x+b+1-a-b-4}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(a+3)x-a-3}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x-1)(a+3)}{x-1}=a+3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow a+3=7\Rightarrow a=4\Rightarrow b=7.$

Înlocuim a și b, și se obține funcția f: $[0;3] \to$ R, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 9, & x \in [0;1) \\ 7x + 8, & x \in [1;3] \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \in (0;1) \\ 7, & x \in [1;3) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{f continuă pe} [0;3] \\ \text{f derivabilă pe} (0;3) \end{array}\right| \overset{\text{T.L.}}{\Rightarrow} (\exists)\ c \in (0;3)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$.

I. $2c + 5 = \frac{29-9}{3}$, $c \in (0;1) \Rightarrow c = \frac{5}{6}$.

II. $7 = \frac{20}{3} - 5$(F).

APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

1. Să se rezolve ecuația:

$$3^x + 5^x = 2^x + 6^x.$$

Rezolvare

Se observă că $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții.
Demonstrăm că nu mai sunt alte soluții reale.
Ecuația se scrie sub forma $3^x - 2^x = 6^x - 5^x$.
Atașăm o funcție f: R → R, $f(x) = t^x, x \in$ R.

$\left.\begin{array}{l} \text{f continuă pe} [2;3] \\ \text{f derivabilă pe} (2;3) \end{array}\right| \overset{\text{T.L.}}{\Rightarrow} (\exists)\ c_1 \in (2;3)$ astfel încât $f'(c_1) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot {c_1}^{x-1} = 3^x - 2^x$. (1)

$\left.\begin{array}{l} \text{f continuă pe} [5;6] \\ \text{f derivabilă pe} (5;6) \end{array}\right| \overset{\text{T.L.}}{\Rightarrow} (\exists)\ c_2 \in (2;3)$ astfel încât $f'(c_2) = \frac{f(6)-f(5)}{6-5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot {c_2}^{x-1} = 6^x - 5^x$.(2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow x \cdot {c_1}^{x-1} = x \cdot {c_2}^{x-1} \Rightarrow x \Rightarrow x \cdot ({c_1}^{x-1} - {c_2}^{x-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ sau ${c_1}^{x-1} = {c_2}^{x-1}$

$\left.\begin{array}{r} {c_1}^{x-1} = {c_2}^{x-1} \\ c_1 \neq c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

Deci ecuația are două soluții: $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$

2. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} < \text{tg}a - \text{tg}b < \frac{a-b}{\cos^2 a}, 0 < a < b < \frac{\pi}{2}.$$

Rezolvare

Atașăm o funcție f: $\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \to$ R, $f(x) = \text{tg}\, x$.

$\left.\begin{array}{l} \text{f continuă pe } [a;b] \\ \\ \text{f derivabilă pe } (a;b) \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \overset{\text{T.L.}}{\Rightarrow} (\exists)\ c \in (a,b) \text{ astfel încât } f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \qquad f'(c) = \dfrac{1}{\cos^2 c}, \qquad c \in (a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (1)

$$\left.\begin{matrix} a < c < b \\ \cos\ \text{s.d. pe} \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos b < \cos c < \cos a \\ \cos x \geq 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos^2 b < \cos^2 c < \cos^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{tgb - tga}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{\cos^2 a} < tgb - tga < \frac{b-a}{\cos^2 b} \Rightarrow \frac{a-b}{\cos^2 a} < tga - tgb < \frac{a-b}{\cos^2 b}.$$

3. Să se compare numerele:

$$\sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{5} \text{ și } \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{10}\ .$$

Rezolvare

Fie $f: D \to R,\ f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in N^*\setminus\{1\}$.
Putem considera $D = (0; +\infty)$.
Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[4; 5]$ și $[9; 10]$.
$(\exists)\ c_1 \in (4; 5)$ astfel încât $f'(c_1) = \frac{f(5)-f(4)}{5-4} \Rightarrow\ f'(c_1) = \sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{4}$.
$(\exists)\ c_2 \in (9; 10)$ astfel încât $f'(c_2) = \frac{f(10)-f(9)}{10-9} \Rightarrow\ f'(c_1) = \sqrt[n]{10} - \sqrt[n]{9}$.
Dar $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $, x > 0;$
Evident $c_1 < c_2$.
Avem: $\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{4} = \frac{1}{n\sqrt[n]{{c_1}^{n-1}}} > \frac{1}{n\sqrt[n]{{c_2}^{n-1}}} = \sqrt[n]{10} - \sqrt[n]{9} \Rightarrow \sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{9} > \sqrt[n]{10} + \sqrt[n]{4}$.

4. Se considera șirul cu termenul general
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent.
b) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_n - \ln n,\ \ n \in N^*$, este convergent și $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \in (0; 1)$.

Rezolvare

a) Fie funcția $f: (0; +\infty) \to R,\ f(x) = \ln x$.
Se aplică teorema lui Lagrange pe $[n; n+1],\ n \in N^* \Rightarrow$
$(\exists)\ c \in (n; n+1)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} \Rightarrow \frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln n, n \in N^*$.
Dar $k < c < k+1, (\forall)\ k = \overline{1,n}\ \ \Rightarrow\ \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, (\forall)\ k = \overline{1,n}$
Cum $k = \overline{1,n} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$

....

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)\ < \frac{1}{n}$$

Se adună relațiile și se obține:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=a_n, \forall\, n\in N^* \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n>\ln(n+1)=c_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ este divergent.}$$

b) Din relațiile

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n+\frac{1}{n+1}-1<\ln(n+1)<a_n \Rightarrow \frac{1}{n+1}-1-\ln(n+1)<a_n<-\ln(n+1) \Rightarrow$$

$$\frac{-n}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<\ln n-a_n<\ln n-\ln(n+1) \Rightarrow \frac{-n}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}<b_n<\ln\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{n+1}{n}<b_n<\frac{n}{n+1}-\ln\frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n\in(0;1)$$

Observație

Cu ajutorul Teoremei lui Lagrange putem:

- Rezolva ecuații;
- Demonstra inegalitați;
- Compara numere;
- Studia convergenta si calcula limita unor șiruri.

Exercitii propuse

1. Să se rezolve ecuația:

$3^x+5^x=2^x+6^x$.

2. Să se demonstreze inegalitatea

$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}, 0<a<b.$

3. Să se compare numerele:

$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{5}$ și $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}$.

4. Calculați limita șirului de termen general:

$$a_n=\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}, \qquad n\in N^*$$